CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA PRIMEIRA AULA

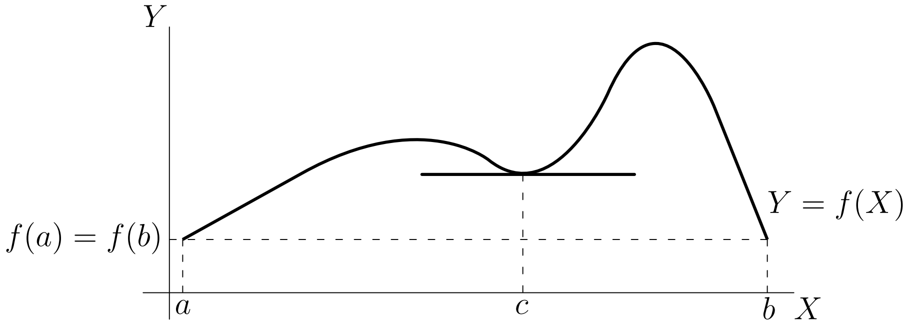
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, apresentaremos o Teorema do Valor Médio e algumas de suas conseqüências como: determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função; e estabelecer que a reta tangente é a que melhor aproxima uma curva no entorno do ponto de tangência.

1. O Teorema do Valor Médio (TVM)

Utilizaremos o próximo resultado, que é conhecido como o Teorema de Rolle, para estabelecer o TVM.

Teorema 1. *Seja f uma função que assume o mesmo valor nos extremos do intervalo $[a, b]$. Se $f(X)$ é contínua para todo X em $[a, b]$ e possui derivada para todo X em (a, b), então existe c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*



Vamos estabeler o Teorema de Rolle — veja a ilustração anterior. Se $f(X)$ é constante no intervalo $[a, b]$, então $f'(X) = 0$ para todo X em (a, b). Portanto, neste caso, podemos tomar para c qualquer valor neste intevalo. Vamos assumir que $f(X)$ não é constante no intervalo $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$, o máximo ou o mínimo absoluto de $f(X)$ no intervalo $[a, b]$ ocorre em seu interior, digamos em $X = c$. Conseqüentemente será um máximo ou um mínimo local. Como, por hipótese, $f'(X)$ existe para todo X no interior do intervalo (a, b), temos que $f'(c) = 0$ e o teorema segue.

Agora enunciaremos o TVM que tem como caso particular o Teorema de Rolle.

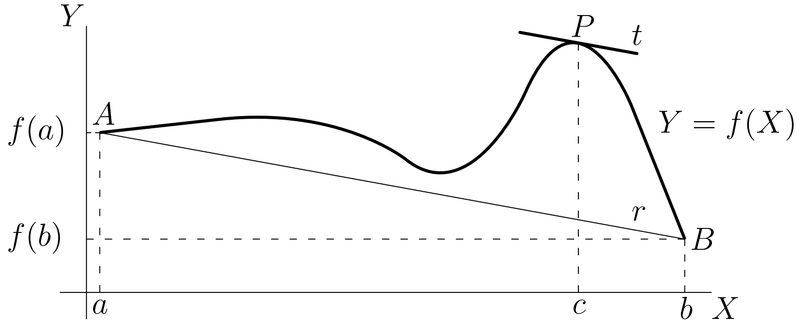
Teorema 2. *Se $f(X)$ é contínua para todo X em $[a, b]$ e possui derivada para todo X em (a, b), então existe c em (a, b) tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

Note que o valor que está na direta da identidade (1) é o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos A e B de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ respectivamente que pertencem ao gráfico de f. Portanto, o TVM garante a existência de um ponto P no

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

gráfico de f, entre A e B, cuja reta tangente t em P é paralela a r. Na figura segunte, o gráfico de f e a reta t têm traçados grossos e a reta r fino.



Agora demonstraremos o TVM. A reta r é o gráfico da seguinte função

$$r(X) = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(X - a)$$

Como $r(a) = f(a)$ e $r(b) = f(b)$, a função contínua no intervalo $[a, b]$ dada por

$$g(X) = f(X) - r(X) = f(X) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(X - a)$$

satisfaz $g(a) = g(b) = 0$. Como

$$g'(X) = f'(X) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

existe para todo X em (a,b), podemos aplicar o Teorema de Role para $g(X)$ neste intervalo. Conseqüentemente existe c em (a, b) tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Isto é,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Portanto, o TVM segue.

A partir do TVM podemos concluir facilmente que o seguinte fato, utilizado anteriormente e justificado por um argumento baseado em uma interpretação oriunda da física, é válido: *Se $f'(X) = 0$ para todo X pertencente a um intervalo I, então $f(X)$ é constante em I.* Pelo TVM, para diferentes elementos a e b em I, existe c em (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como c está em I, temos que $f'(c) = 0$ e daí $f(a) = f(b)$. Isto é, $f(X)$ é constante em I.

2. Crescimento e decrescimento

O sinal da derivada de uma função é utilizado para determinar os intervalos para os quais esta função é crescente ou decrescente.

Uma função f é dita **crescente** no intervalo I quando, para todos a e b em I tais que $a < b$, temos que $f(a) < f(b)$.

Uma função f é dita **decrescente** no intervalo I quando, para todos a e b em I tais que $a < b$, temos que $f(a) > f(b)$.

Agora apresentamos uma regra que, quando satisfeita, garante que a função é crescente ou decrescente em um dado intervalo.

Regra 3. *Se $f(X)$ é uma função contínua no intervalo I, então:*

(i) *$f(X)$ é crescente em I quando $f'(X) > 0$, para todo X no interior do intervalo I.*

(ii) *$f(X)$ é decrescente em I quando $f'(X) < 0$, para todo X no interior do intervalo I.*

Vamos estabelecer a primeira parte desta regra, já que a segunda é verificada de maneira análoga. Escolha a e b em I tais que $a < b$. Necessitamos mostrar que $f(a) < f(b)$ e, portanto, $f(X)$ é crescente. Pelo TVM aplicado para $f(X)$ e o intervalo $[a, b]$, existe c em (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta identidade pode ser reescrita como

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

Como c está no interior do intervalo I, por hipótese, $f'(c)$ é positivo. Como $b - a$ também é positivo e o produto de dois números positivos é positivo, temos que $f(b) - f(a)$ é positivo. Isto é, $f(a) < f(b)$. Conseqüentemente $f(X)$ é crescente em I.

Exemplo 4. *Considere a função $f(X)$, definida para todo número real X tal que $X \neq 1$, que é dada pela expressão*

$$f(X) = \frac{X^2 + 3}{X - 1}$$

Estude o crescimento de f.

Determinaremos as regiões de crescimento e decrescimento de $f(X)$ a partir da sua derivada primeira

$$f'(X) = \frac{2X(X - 1) - (X^2 + 3)}{(X - 1)^2} = \frac{X^2 - 2X - 3}{(X - 1)^2} = \frac{(X + 1)(X - 3)}{(X - 1)^2}$$

Note que o denominador de $f'(X)$, para $X \neq 1$, é sempre positivo. Portanto, o sinal de $f'(X)$ é igual ao sinal de $(X + 1)(X - 3)$, pois o quociente de dois números com o mesmo sinal é positivio e com sinais diferentes é negativo. Mas uma função quadrática com concavidade voltada para cima é negativa entre as raízes e positiva fora das raízes. Como, neste caso, as raízes são -1 e 3, o sinal de $f'(X)$ é

$+$		$-$		$-$		$+$	sinal de $f'(X)$
$\nearrow$	-1	$\searrow$	1	$\searrow$	3	$\nearrow$	

Portanto,

- $f(X)$ é crescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[3, +\infty)$.
- $f(X)$ é decrescente nos intervalos $[-1, 1)$ e $(1, 3]$.

Note que, pela Regra 3, não podemos garantir que a função $f(X)$ é decrescente no intervalo $[-1, 3]$ porque $f(X)$ não está definida para $X = 1$. (Na verdade, $f(X)$ não é decrescente neste intervalo porque $\lim_{X\to 1^+} f(X) = +\infty$ e $\lim_{X\to 1^-} f(X) = -\infty$.)

Exemplo 5. *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função f dada por $f(X) = X^4 + 4X^3 - 8X^2 + 19$. Ache todos os pontos de máximos e mínimos locais de f.*

Para fazer a análise do crescimento de f necessitamos estudar o sinal de f'. Temos que

$$f'(X) = 4X^3 + 12X^2 - 16X = 4X(X^2 + 3X - 4) = 4(X + 4)X(X - 1)$$

Note que o sinal de $f'(X)$ coincide com o sinal de $\frac{f'(X)}{4} = (X + 4)X(X - 1)$ porque o produto de 4, que é positivo, por qualquer outro número preserva o seu sinal, isto é, o produto de um número positivo por um positivo é positivo e por um negativo é negativo. Mas $(X + 4)X(X - 1)$ é o produto de $X + 4$, X e $X - 1$. A expressão $X - a$ é positiva quando $a < X$ e negativa quando $X < a$. Apresentamos esta informação para cada caso específico nas três primeiras linhas do próximo quadro. A justificativa para a quarta linha vem a seguir.

$-$	-4	$-$	0	$-$	1	$+$	sinal de $X - 1$
$-$	-4	$-$	0	$+$	1	$+$	sinal de X
$-$	-4	$+$	0	$+$	1	$+$	sinal de $X + 4$
$-$	-4	$+$	0	$-$	1	$+$	sinal de $\frac{f'(X)}{4}$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Observe que:

- Quando $X > 1$, temos que $X - 1, X$ e $X + 4$ são todos positivos. O produto de três números positivos é positivo. Portanto $f'(X) > 0$ para todo $X > 1$. Logo $f(X)$ é crescente no intervalo $[1, +\infty)$.
- Quando $0 < X < 1$, temos que X e $X + 4$ são positivos e $X - 1$ é negativo. O produto de dois números positivos por um negativo é negativo. Portanto $f'(X) < 0$ para todo $0 < X < 1$. Logo $f(X)$ é decrescente no intervalo $[0, 1]$.
- Quando $-4 < X < 0$, temos que $X + 4$ é positivo e X e $X - 1$ são negativos. O produto de dois números negativos por um positivo é positivo. Portanto $f'(X) > 0$ para todo $-4 < X < 0$. Logo $f(X)$ é decrescente no intervalo $[-4, 0]$.
- Quando $X < -4$, temos que $X - 1, X$ e $X + 4$ são todos negativos. O produto de três números negativos é negativo. Portanto $f'(X) < 0$ para todo $X < -4$. Logo $f(X)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, -4]$.

Note que:

- $X = 1$ é um ponto de mínimo local para $f(X)$ porque, em torno de $X = 1$, $f(X)$ decresce até chegar em $X = 1$ e a partir deste valor cresce.
- $X = 0$ é um ponto de máximo local para $f(X)$ porque, em torno de $X = 0$, $f(X)$ cresce até chegar em $X = 0$ e a partir deste valor decresce.
- $X = -4$ é um ponto de mínimo local para $f(X)$ porque, em torno de $X = -4$, $f(X)$ decresce até chegar em $X = -4$ e a partir deste valor cresce.

Exemplo 6. *Mostre que a função $f(X) = X - \operatorname{sen} X$ é crescente nos reais.*

Vamos analisar o sinal da derivada de $f(X)$. Como

$$f'(X) = 1 - \cos X$$

a função $f(X)$ é crescente no intervalo $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$, para todo k inteiro, porque $f'(X) > 0$ para todo X no intervalo $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$. Logo $f(X)$ é crescente nos reais.

Exemplo 7. *Para comercializar o seu produto, uma fábrica de conservas deseja confeccionar uma embalagem de latão, na forma de um cilindro circular reto, com volume V. Qual deve ser as dimensões desta embalagem de forma que o material utilizado na sua produção seja mínimo?*

Sejam R e H o raio da base e a altura respectivamente da embalagem a ser produzida. Como esta embalagem tem volume V e forma de um cilindro circular reto, temos que

$$V = \pi R^2 H$$

Retirando o valor de H desta expressão, obtemos

$$H = \frac{V}{\pi R^2} \tag{2}$$

Para minimizar o material utilizado, necessitamos minimizar a área total da embalagem. Isto é, temos de achar o mínimo de

$$A = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Ao substituirmos (2) nesta identidade, obtemos que

$$A(R) = 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2}\right) + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 \tag{3}$$

(Escrevemos $A(R)$ em vez de A para enfatizar o fato de a área A é apenas uma função de R — lembre-se que V é uma constante.) Note que R pode assumir qualquer valor no intervalo $(0, +\infty)$. Em outras palavras, desejamos encontra o mínimo absoluto de $A(R)$ no intervalor $(0, +\infty)$. Não temos um resultado que garanta a existência de tal mínimo como temos para o caso de um intervalo fechado. Vamos analisar o crescimento desta função. Temos que

$$A'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{2(2\pi R^3 - V)}{R^2}$$

Para determinar os pontos críticos de $A(R)$, temos de solucionar a equação

$$A'(R) = \frac{2(2\pi R^3 - V)}{R^2} = 0$$

Logo o numerador da fração é nulo, isto é,

$$2\pi R^3 - V = 0 \quad \text{ou} \quad 2\pi R^3 = V$$

Dividindo a identidade da direita por 2π e retiando a raiz cúbica, obtemos o valor de R

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \tag{4}$$

que é o único ponto crítico de $A(R)$. Observe que

- Quando $R > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, o numerador de $A'(R)$ é positivo e conseqüentemente $A'(R)$ é positivo porque seu denominador é sempre positivo. Isto é, $A(R)$ é crescente no intervalo $\left[\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, +\infty\right)$
- Quando $R < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, o numerador de $A'(R)$ é negativo e conseqüentemente $A'(R)$ é negativo porque seu denominador é sempre positivo. Isto é, $A(R)$ é decrescente no intervalo $\left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right]$

Conseqüentemente $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ é um ponto de mínimo absoluto para $A(R)$. Quando R assume este valor, por (2), temos que

(5) $$H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Logo as dimensões da embalagem procurada são dadas por (4) e (5). Em particular, no mínimo, $H = 2R$, ou seja, a altura do cilindro é igual ao diâmetro da base.

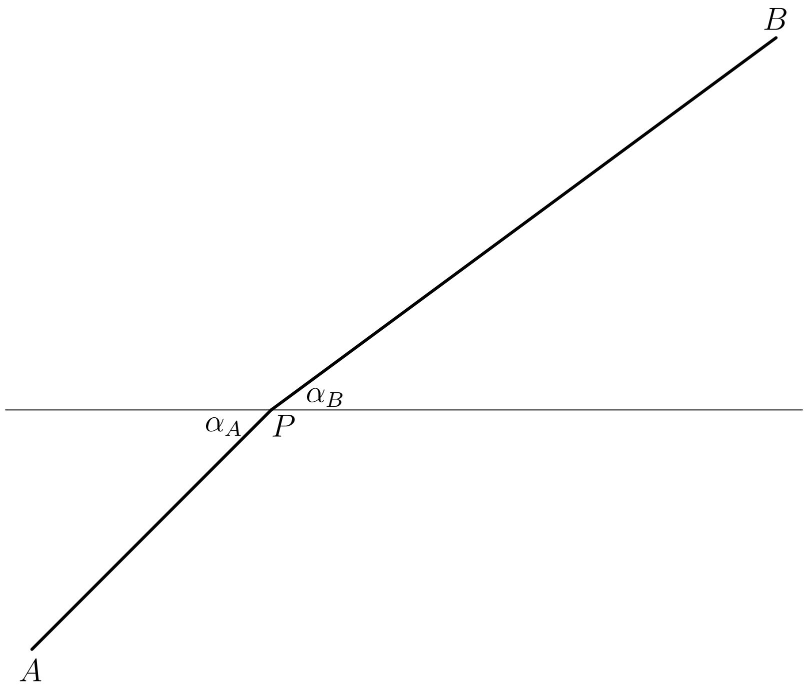
Exercício 8. *Para cada uma das funções a seguir, cujo domínio de definição dever ser o maior possível, determine:*

(i) *Este domínio.*
(ii) *Seus intervalos de crescimento e decrescimento.*
(iii) *Caso existam, pontos de máximo ou mínimo local.*
(iv) *Caso existam, valor de máximo absoluto e valor de mínimo absoluto.*

$$\begin{aligned} a(X) &= X^4 - 18X^2 + 43 \\ b(X) &= \frac{X}{X^2+1} \\ c(X) &= \frac{X}{(X+1)^2} \\ d(X) &= \ln\left(\frac{2+\operatorname{sen} X}{3+\operatorname{sen} X}\right) \\ e(X) &= X^2 e^{-X} \end{aligned}$$

Exercício 9. *Determine as dimensões do cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio R que possui área lateral mínima.*

Exercício 10. *Determine as dimensões do cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio R que possui volume mínimo.*



Exercício 11. *Na figura anterior dois meios homogênios são separados por um plano* Π*. Os pontos* A *e* B *estão localizados em meios diferentes. Assuma que a velocidade da luz no meio que contém o ponto* A *é* V_A *e no que contém* B *é* V_B*. Um raio de luz que vai de* A *até* B *passa por algum ponto* P *em* Π*. Sabendo que a luz percorre a trajetória que minimiza o tempo gasto para ir de* A *até* B*, mostre que*

$$V_B \cos \alpha_A = V_A \cos \alpha_B$$

na qual α_A *e* α_B *representam os ângulos entre* Π *e os segmentos* AP *e* PB *respectivamente.*

Exercício 12. *Deseja-se fazer uma calha a partir de uma folha de latão de comprimento* c *e largura* l *curvando-a de forma que coincida com parte da superfície de um cilindro circular reto de comprimento* c *e raio da base* r*. Determine o valor de* r *para o qual a capaciadade da calha seja máxima.*

3. A reta que melhor aproxima o gráfico de uma função

Nesta parte da aula, iremos responder a seguinte pergunta sobre o gráfico de uma função f: de todas as retas que passam pelo ponto de coordenadas $(a, f(a))$, qual é a que melhor aproxima o gráfico f na vizinhança deste ponto? Mostraremos que, quando existir, é a reta tangente ao gráfico de f neste ponto.

3.1. É a reta tangente.

Vamos assumir que o gráfico de f possua reta tangente no ponto $(a, f(a))$, ou seja, que $f'(a)$ existe. Uma reta com coeficiente angular m que passa pelo ponto $(a, f(a))$ é o gráfico da seguinte função:

$$r(X) = f(a) + m(X - a)$$

Estamos interessados na distância do gráfico de f para o de r. Mediremos esta distância através da dirença entre as ordenadas dos pontos nestes gráficos possuindo a mesma abscissa. Isto é, consideraremos a seguinte função

$$d(X) = f(X) - r(X) = f(X) - f(a) - m(X - a) \tag{6}$$

Como estamos interessados nesta diferença apenas para valores de X próximos de a, vamos comparar esta dirença com a distância de X até a, ou seja, com $|X - a|$. Dividindo $|d(X)|$ por $|X - a|$ obtemos

$$\frac{|d(X)|}{|X - a|} = \left| \frac{f(X) - f(a)}{X - a} - m \right| \tag{7}$$

Quando $X \approx a$, na qual o símbolo $\approx$ tem o significado de "estar proximo",

$$\frac{f(X) - f(a)}{X - a} \approx f'(a)$$

e conseqüentemente, por (7), temos que

$$\frac{|d(X)|}{|X - a|} \approx |f'(a) - m| \tag{8}$$

que é muito pequeno quando m conincide com $f'(a)$ apenas. Isto é, quando o gráfico de r é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Podemos refinar este argumento para mostrar que

$$|d(X)| \geq K|X - a| \tag{9}$$

para $K = \frac{|f'(a)-m|}{2}$ quando $X \approx a$. Note que $K \neq 0$ quando o gráfico de $r(X)$ não é a reta tangente ao gráfico de $f(X)$ no ponto com coordenadas $(a, f(a))$.

3.2. **Estimando melhor a aproximação.** Agora assuma que $f''(X)$ exista para todo X pertencente a um intervalo aberto I que contém a. Mostraremos que, para todo X em I, existe $c(X)$ tal que $c(X)$ está entre a e X tal que

$$f(X) = f(a) + f'(a)(X-a) + \frac{f''(c(X))}{2}(X-a)^2 \tag{10}$$

Neste caso

$$d(X) = f(X) - f(a) - f'(a)(X-a) = \frac{f''(c(X))}{2}(X-a)^2$$

e daí

$$\frac{|d(X)|}{|X-a|} = \frac{|f''(c(X))|}{2}|X-a| \tag{11}$$

Note que (12) nos diz quão próximo de 0 fica o quociente $\frac{|d(X)|}{|X-a|}$ no caso em que $m = f'(a)$ — compare com (8). Caso $|f''(X)|$ seja limitado por $2L$ no intervalo I, temos que

$$|d(X)| \leq L|X-a|^2 \tag{12}$$

Compare esta desigualdade com (9).

Vamos mostrar que (10) vale para $X = b$ que manteremos fixo. Considera a função

$$h(X) = f(X) - f(a) - f'(a)(X-a) - \frac{\lambda}{2}(X-a)^2 \tag{13}$$

Note que $h(a) = 0$. Escolha λ tal que $h(b) = 0$. Pelo TVM, existe s tal que $h'(s) = 0$, com s entre a e b, porque $h(a) = h(b) = 0$. Como

$$h'(X) = f'(X) - f'(a) - \lambda(X-a)$$

temos que $h'(a) = 0$. Pelo TVM, existe c entre a e s tal que $h''(c) = 0$ porque $h'(a) = h'(s) = 0$. Como $h''(X) = f''(X) - \lambda$, temos que $\lambda = f''(c)$. Substituindo este valor em (13), obtemos que

$$h(X) = f(X) - f(a) - f'(a)(X-a) - \frac{f''(c)}{2}(X-a)^2 \tag{14}$$

Como, por hipótese, $h(b) = 0$, temos que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2 \tag{15}$$

Como c depende de b, enfatizamos esta dependência escrevendo-o como $c(b)$. Isto é, (15) é reescrita como

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c(b))}{2}(b-a)^2 \tag{16}$$

que coincide com (10) pois b pode ser qualquer valor no intervalo I.

4. Respostas dos exercícios

8. (i) O domínio de todas estas funções é $\mathbb{R}$ exeto $c(X)$ que não está definida apenas para $X = -1$ (ii) $a(X)$ é crescente nos intervalos $[-3, 0]$ e $[3, +\infty)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, -3]$ e $[0, 3]$; $b(X)$ é crescente no intervalo $[-1, 1]$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$; $c(X)$ é crescente no intervalo $(-1, 1]$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $[1, +\infty)$; para todo k inteiro, $d(X)$ é crescente nos intervalos $\left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi\right]$ e decrescente nos intervalos $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$; $e(X)$ é crescente no intervalo $[0, 2]$ e decrescente nos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[2, +\infty)$ (iii) para $a(X)$: $X = -3$

e $X = 3$ pontos de mínimos locais e $X = 0$ ponto de máximo local; para $b(X)$: $X = -1$ ponto de mínimo local e $X = 1$ ponto de máximo local; para $c(X)$: $X = 1$ ponto de máximo local; para $d(X)$: para todo k inteiro, $X = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ponto de mínimo local e $X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ponto de máximo local; para $e(X)$: $X = 0$ ponto de mínimo local e $X = 2$ ponto de máximo local (iv) $a(X)$ não tem máximo ou mínimo absoluto; para $b(X)$: $X = -1$ ponto de mínimo absoluto e $X = 1$ ponto de máximo absoluto; para $c(X)$: $X = 1$ ponto de máximo absoluto e não tem ponto de mínimo absoluto; para $d(X)$: para todo k inteiro, $X = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ponto de mínimo absoluto e $X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ponto de máximo absoluto; para $e(X)$: $X = 0$ ponto de mínimo absoluto e não possui ponto de máximo absoluto **9.** A altura do cone é igual a $\frac{4R}{3}$ **10.** A altura do cone é igual a $\frac{4R}{3}$ **12.** $\frac{l}{\pi}$ (isto é, uma seção transversal da calha será igual a um semi-círculo)

Conteúdo da décima primeira aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos